1. **বিকল্প উত্তরগুলির মধ্যে থেকে সঠিক উত্তরটি বেছে লেখো ঃ** **1**

(i) যদি $f(y)=\int_{-1}^{y}|x|\,dx$ হয়, তবে $y\geq 0$ এর জন্য f(y) =

(a) $1 + y^2$ (b) $1 - y^2$ (c) $\frac{1-y^2}{2}$ (d) $\frac{1+y^2}{2}$

Ans:

1.(i) $$f(y)=\int_{-1}^{y}|x|\,dx=\int_{-1}^{0}|x|\,dx+\int_{0}^{y}|x|\,dx=-\int_{-1}^{0}x\,dx+\int_{0}^{y}x\,dx$$

$$=-\left[\frac{x^2}{2}\right]_{-1}^{0}+\left[\frac{x^2}{2}\right]_{0}^{y}=-\left(0-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{y^2}{2}-0\right)=\frac{y^2+1}{2}$$

Ans. (d)

2. **নিম্নলিখিত প্রশ্নগুলির উত্তর দাও ঃ** **2**

(i) $f(x) = x^x$ হলে, f'(x) এর মান নির্ণয় করো।

Ans:

2.(i) $f(x) = x^x$

উভয়পক্ষে লগারিদম নিয়ে পাই

$\log f(x) = x \log x$

উভয়পক্ষে অন্তরকলন করে পাই

$$\frac{1}{f(x)}.f'(x)=x\times\frac{1}{x}+\log x$$

বা $f'(x)=f(x)\,(1+\log x)$ (ধরি)

$\therefore x = 5+3t,\ y = -4+7t,\ z = 6+2t$

$$\vec{r} = x\hat{i}+y\hat{j}+z\hat{k}$$

$$= (5+3t)\hat{i}+(-4+7t)\hat{j}+(6+2t)\hat{k}$$

$$5\hat{i}-4\hat{j}+6\hat{k}+t\left(3\hat{i}+7\hat{j}+2\hat{k}\right)$$

3. **নিম্নলিখিত প্রশ্নগুলির উত্তর দাও ঃ** **4**

(i) প্রমাণ করো যে, $\tan^{-1}\left\{\frac{\sqrt{1+\cos x}\ +\sqrt{1-\cos x}}{\sqrt{1+\cos x}\ -\sqrt{1-\cos x}}\right\}=\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}, 0<x<x/2$

Ans:

3.(i) $\tan^{-1}\left\{\frac{\sqrt{1+\cos x}\ +\sqrt{1-\cos x}}{\sqrt{1+\cos x}\ -\sqrt{1-\cos x}}\right\}$

$$= \tan^{-1}\left\{\frac{\sqrt{2}\cos {}^{x}\!/_{2}+\sqrt{2}\sin {}^{x}\!/_{2}}{\sqrt{2}\cos {}^{x}\!/_{2}-\sqrt{2}\sin {}^{x}\!/_{2}}\right\}$$

$$= \tan^{-1}\left\{\frac{1+\tan {}^{x}\!/_{2}}{1-\tan {}^{x}\!/_{2}}\right\}$$

$$= \tan^{-1}\left\{\frac{\tan {}^{x}\!/_{4}+\tan {}^{x}\!/_{2}}{1-\tan\frac{\pi}{4}\ \tan {}^{x}\!/_{2}}\right\}$$

$$= \tan^{-1}\tan\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2}\right)$$

$$= \frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}$$

4. **নিম্নলিখিত প্রশ্নগুলির উত্তর দাও ঃ** **5**

(i) দেখাও যে, প্রদত্ত সমগ্রতল বিশিষ্ট সর্ববৃহৎ আয়তনের লম্ববৃত্তাকার শঙ্কুর অর্ধশীর্ষকোণ $\sin^{-1}\left(\frac{1}{3}\right)$.

Ans:

4.(i) মনে করি, লম্ববৃত্তাকার শঙ্কুটির উচ্চতা h, তির্যক উচ্চতা l, ভূমির ব্যাসার্ধ r, সমগ্রতলের ক্ষেত্রফল S এবং আয়তন V.

$\therefore S=\pi r^2+\pi rl$ ধ্রুবক => = $\frac{S-\pi r^2}{\pi r}$ ....(1)

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$$

বা $V^2 = \frac{1}{9}\pi^2 r^4 h^2$

$$= \frac{1}{9}\pi^2 r^4 \left(l^2 - r^2\right)$$

$$= \frac{\pi^2 r^4}{9}\left[\frac{\left(S - \pi r^2\right)^2}{\pi^2 r^2} - r^2\right]$$

$$= \frac{\pi^2 r^4}{9}\left[\frac{s^2 - 2S\pi r^2 + \pi^2 r^4 - \pi^2 r^4}{\pi^2 r^2}\right]$$

$$= \frac{1}{9}\left[r^2 s^2 - 2s\pi r^4\right]$$

$$\frac{d}{dr}\left(V^2\right) = \frac{1}{9}\left[2rS^2 - 2S\pi.4r^3\right]$$

$$\frac{d^2}{dr^2}\left(V^2\right) = \frac{1}{9}\left[2S^2 - 8\pi S.3r^2\right]$$

$$\frac{d}{dr}\left(V^2\right) = 0 \Rightarrow 2rS^2 = 2S\pi.4r^3 \Rightarrow S = 4\pi r^2$$

$$\left[\frac{d^2\left(v^2\right)}{dr^2}\right]_{5 = 4\pi r_2} = \frac{1}{9}\left[2 \text{ x } 16\pi^2 r^4 - 24\pi r^2.4\pi r^2\right]$$

$$= \frac{64}{9}\pi^2 r^4 < 0$$

$\therefore S = 4\pi r^2$ হলে, V^2 তথা V চরম হয়।

যখন $S = 4\pi t^2$ তখন $4\pi r^2 = \pi r^2 + \pi rl \Rightarrow l = 3r$

$\therefore$ অর্ধশীর্ষকোণ α হলে, $\text{Sin}\alpha = \frac{r}{l} = \frac{r}{3r} = \frac{1}{3} \Rightarrow \alpha = \text{Sin}^{-1}\frac{1}{3}$